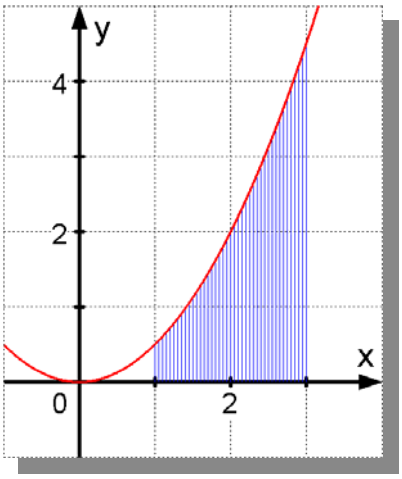


Analysis

Flächenberechnungen

Teil 2

DEMO-Seiten
Für www.mathe-cd.de

Teil 2: Praktischer Teil

Alle wichtigen Methoden

Demo-Text für www.mathe-cd.de

Datei Nr. 48 112

Stand 15. Dezember 2008

Friedrich Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

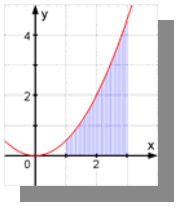
Inhalt

§ 1 Die Fläche eines krummlinigen Trapezes 1

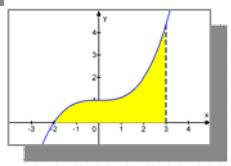
1.1 Wissen (Grundlagen zur Integration) 1

1.2 Musterbeispiele 2

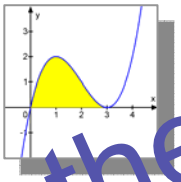
B1: $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ 2



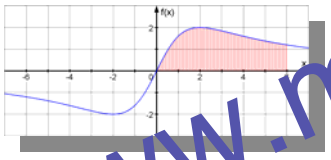
B2: $f(x) = \frac{1}{8}x^3 + 1$ 3



B3: $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + \frac{9}{2}x$ 4

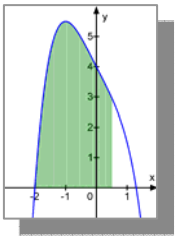


B4: $f(x) = \frac{8x}{x^2 + 4}$ 5

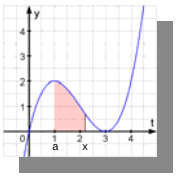


1.3 Flächeninhaltsfunktionen 6

B5: $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 4$ 6

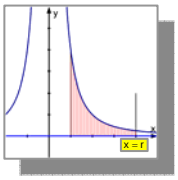


B6: $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + \frac{9}{2}x$ 7

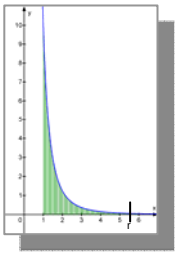


1.4 Flächen, die ins Unendliche reichen 8

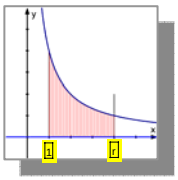
B7: $f(x) = \frac{4}{x^2}$ 8



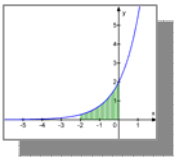
B8: $f(x) = \frac{10}{x^3}$ 9



B9: $f(x) = \frac{4}{x}$ 10



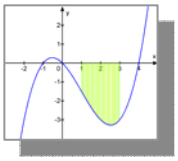
B10 $f(x) = 2 \cdot e^x$ 10



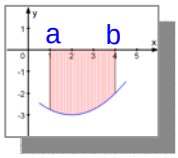
Demo-Text für www.mathe-cd.d

1.5 Flächeninhalte von Kru-Li-Traps unter der x-Achse 11

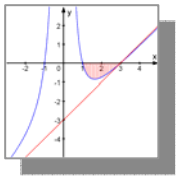
B11: $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x^2 - x$ 11



B12: $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - x - 2$ 12



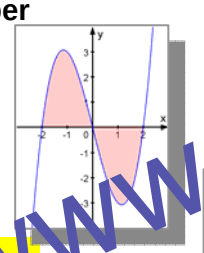
B13: $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{x^2}$ 12



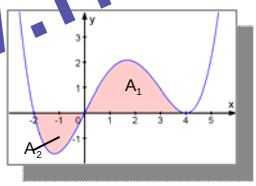
§ 2 Andere Flächenformen 13

2.1 Es geht drunter und drüber 13

B14: $f(x) = x^3 - 4x$ 13

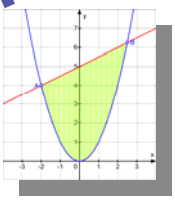


B15: $f(x) = \frac{1}{16}(x^4 - 6x^3 + 32x)$ 14

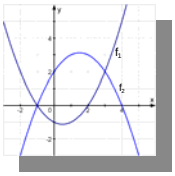


2.2 Flächen zwischen zwei Kurven 15

B16: 15

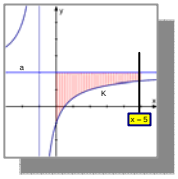


B17: 17

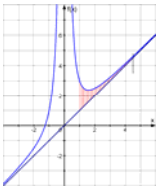


2.3 Fläche zwischen einer Kurve und ihrer Asymptote 19

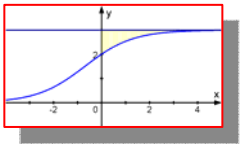
B18: $f(x) = \frac{2x - 1}{x + 1}$ 19



B19: $f(x) = \frac{x^3 + 2}{x^2}$ 20

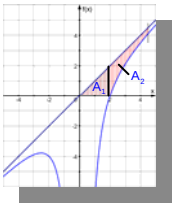


B20: $f(x) = \frac{6}{e^{-x} + 2}$ 21

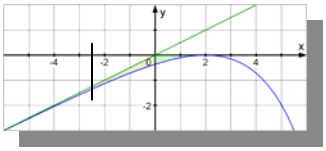


Demo-Text für www.mathe-cd.d

2.4 Zusammengesetzte Flächen 22

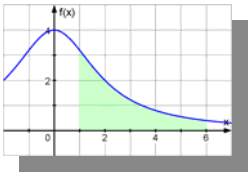
B21: $f(x)=\frac{x^3-8}{x^2}$ 

22

B22: $f(x)=\frac{1}{2}x-e^{\frac{1}{2}x-1}$ 

23

§ 3 Näherungsverfahren für nicht berechenbare Flächen **24**

B23: $f(x)=\frac{16}{x^2+4}$ 

24

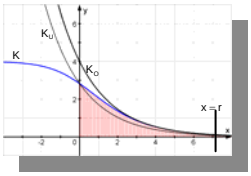
3.1 Rechtecksverfahren 24

3.2 Sehnen-Trapez-Regel 25

3.3 Simpson-Regel 26

Berechnung der Fläche mit arctan 28

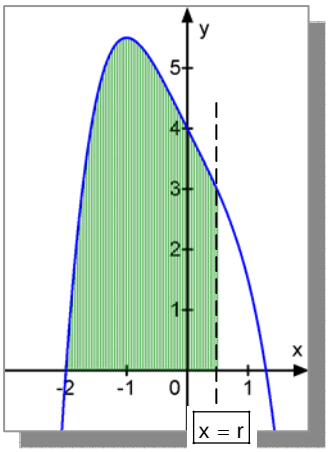
§ 4 Abschätzung von Flächen 29

B24: $f(x)=\frac{4}{\sqrt{1+e^x}}$ 

29

Demo-Text für www.mathe-cd.d

1.3 Flächeninhaltsfunktionen



Lässt man bei einem krummlinigen Trapez den rechten Rand variabel, indem man ihn r oder t nennt, dann entsteht als Maß für die Fläche kein Zahlenwert sondern eine Funktion, die zu jedem Wert dieser Variablen eine Inhaltszahl liefert.

Beispiel 5

Die Funktion $f(x) = -\frac{1}{2}x^4 - 2x + 4$ hat die Nullstelle x = -2,

denn es ist $f(-2) = -\frac{1}{2}\cdot\left(-2^4\right) - 2\cdot(-2) + 4 = \frac{1}{2}\cdot 16 + 4 + 4 = 0$.

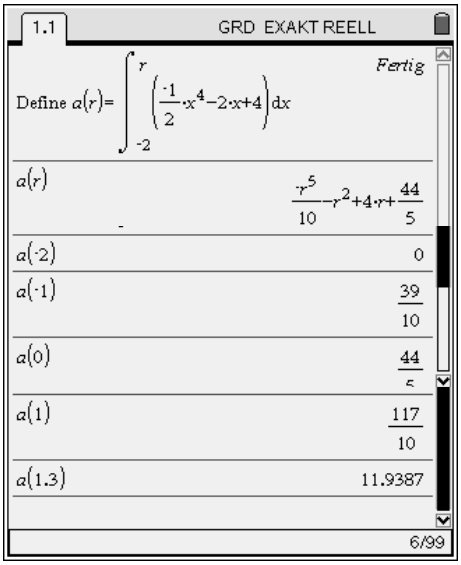
Das Integral $\int_{-2}^{r} f(x)\,dx$ liefert jetzt keine Zahl sondern einen Term mit r als Variabler:

$$A(r) = \int_{-2}^{r} f(x)\,dx = \int_{-2}^{r}\left(-\frac{1}{2}x^4 - 2x + 4\right)dx = \left[-\frac{1}{10}x^5 - x^2 + 4x\right]_{-2}^{r}$$

$$A(r) = \left[-\frac{1}{10}r^5 - r^2 + 4r\right] - \left[-\frac{1}{10}\cdot(-32) - (-2)^2 + 4\cdot(-2)\right]$$

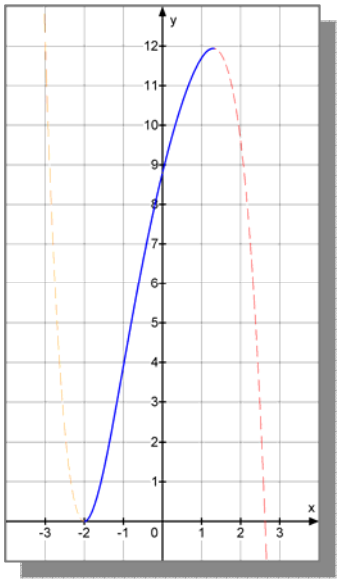
$$A(r) = \left[-\frac{1}{10}r^5 - r^2 + 4r\right] - \left[\frac{32}{10} - 4 - 8\right] = -\frac{1}{10}r^5 - r^2 + 4r - \frac{44}{5}$$

Diese Flächeninhaltsfunktion gestattet nun die Berechnung aller Flächeninhalte.
Dies ist besonders einfach, wenn man CAS-Rechner einsetzt:



Hier wurde zuerst die Flächenfunktion A(r) berechnet und dann angezeigt.

Dann hat der Rechner die Werte für r = - 2, -1, 0, 1 und 1,3 berechnet.
Für r = - 2 stimmen linker und rechter Rand überein, der Inhalt ist dann 0!



Links das Schaubild dieser Flächeninhaltsfunktion.
Sie hat ihr Maximum, wenn die ganze Fläche zwischen Kurve und x-Achse ausgefüllt ist, was bei x = 1,3 etwa der Fall ist. x darf nicht größer als die rechte Nullstelle 1,3 werden, weil dann die Fläche sich mit der x-Achse „kreuzt“. Daher gilt hier auch nur der blaue, durchgezogene Bogen!

Demo-Text für www.mathe-cd.de